Jagiellońskie Warsztaty Olimpijskie 2025/2026

Spotkanie 3 (13 grudnia 2025)

Dominik Bysiewicz, Kacper Piotrowski, Anatoli Shatsila

WIELOMIANY

Zadanie 1. Czy istnieje taki wielomian $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, że $P(6) = 5$ i $P(14) = 9$?

Zadanie 2. Niech wielomian P spełnia równanie $P(x-1) + P(x+1) = 2P(x)$. Udowodnić, że P ma stopień co najwyżej 1.

Zadanie 3. Zbadać, czy równanie

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

dla ustalonych liczb rzeczywistych a, b, c, ma rozwiązanie.

Zadanie 4. Dany jest taki wielomian $P(x)$, że

$$P(8) + P(11) < 19 < P(12) + P(7).$$

Udowodnić, że istnieją liczby rzeczywiste a, b spełniające

$$a + b = P(a) + P(b) = 19.$$

Zadanie 5. Niech a, b, c różne liczby całkowite. Udowodnić, że nie istnieje wielomian $P \in \mathbb{Z}[x]$ spełniający

$$P(a) = b, \qquad P(b) = c, \qquad P(c) = a.$$

Zadanie 6. Dany jest taki wielomian $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, że równanie $|P(x)| = 1$ posiada trzy różne pierwiastki całkowite. Udowodnić, że nie może on posiadać miejsca zerowego w liczbach całkowitych.

Zadanie 7. Znaleźć wszystkie wielomiany $P \in \mathbb{R}[x]$ spełniające

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2)$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8. Znaleźć wszystkie wielomiany $P \in \mathbb{R}[x]$ spełniające równanie $P(x^2) = P(x)^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 9. Dany jest taki wielomian $P(x)$, że dla dowolnego x zachodzi

$$P(\cos x) = P(\sin x).$$

Udowodnić, że istnieje taki wielomian Q, że dla każdego x zachodzi

$$P(x) = Q(x^4 - x^2).$$

Zadanie 10. Dany jest taki wielomian $P(x)$, że dla dowolnego x zachodzi $P(x) \geqslant 0$. Udowodnić, że dla pewnych wielomianów $A(x)$ i $B(x)$ zachodzi

$$P(x) = A(x)^2 + B(x)^2.$$

Zadanie 11. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia $P(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Znaleźć $P(n+1)$.

Zadanie 12. Wielomian

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych. Udowodnić, że

$$Q(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0$$

również nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 13. Niech $P \in \mathbb{Z}[x]$ spełnia $P(-1) = -4$, $P(-3) = -40$, $P(-5) = -156$. Jaka jest największa możliwa liczba liczb całkowitych x spełniających $P(P(x)) = x^2$?

Zadanie 14. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których liczba $P(P(n)+n)$ jest pierwsza dla nieskończenie wielu liczb całkowitych n.

Zadanie 15. Niech a i b będą pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^4 + x^3 - 1$. Udowodnić, że ab jest pierwiastkiem wielomianu

$$Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.$$